

TRASFORMAZIONE DI PARK

GENERALITÀ

La trasformazione di Park si applica a terne di valori istantanei. Questa trasformazione, applicata ai sistemi trifase di tensioni e correnti, risulta particolarmente conveniente e significativa per l'analisi sia del transitorio che del regime sinusoidale o deformato. Mediante tale trasformazione, e in special modo con il formalismo dei vettori spaziali, il trifase è visto non più come giustapposizione di circuiti monofase, ma come sistema dotato in quanto tale di caratteristiche sue proprie. Inoltre i tradizionali strumenti di indagine, quali i fasori ed i componenti simmetrici, si ritrovano come casi particolari all'interno della più generale trasformazione di Park.

La trasformazione di Park, storicamente sorta per lo studio della dinamica delle macchine elettriche rotanti, è comunemente utilizzata in tale settore. Il principale vantaggio in questo campo è di eliminare la dipendenza dalla posizione angolare dei mutui accoppiamenti fra statore e rotore. I vettori spaziali sono inoltre estremamente utili nello studio teorico ed applicativo dei convertitori trifase. Nell'impiantistica elettrica trifase il vettore spaziale è significativo per l'unificazione che ne consegue tra le formulazioni analitiche in regime stazionario e dinamico sia a livello di componenti che di sistema.

TRASFORMAZIONE DI PARK SU ASSI FISSI¹

La trasformazione di Park è applicabile a terne di variabili, come tensioni, correnti, flussi concatenati, cariche elettriche, ecc. La trasformazione di Park chiamata su assi fissi è una trasformazione lineare a coefficienti reali costanti. La matrice di trasformazione è:

$$T_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

¹ *Note sulla simbologia usata.*

Simboli **soprasegnati**: variabili o costanti complesse.

Simboli in caratteri normali: variabili o costanti reali e moduli di grandezze complesse.

Simboli MAIUSCOLI: costanti reali o complesse.

\bar{a}^* : complesso coniugato di \bar{a} .

Re(): parte reale, Im(): parte immaginaria.

j : unità immaginaria.

Questa, applicata ad una terna di valori istantanei di fase $v_a(t)$, $v_b(t)$, $v_c(t)$ (ad esempio tensioni), dà luogo ai tre componenti di Park: componenti sugli assi α , β e componente omopolare.

Si definiscono i vettori delle variabili di fase e di Park:

$$\begin{aligned} \text{Variabili di fase } \mathbf{v}_f &= \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} & \text{Variabili di Park } \mathbf{v}_p &= \begin{bmatrix} v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_0 \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} & \mathbf{v}_p &= \mathbf{T}_0 \mathbf{v}_f \end{aligned} \quad (2)$$

La (1) è una matrice ortogonale, in quanto sussiste la proprietà che l'inversa è uguale alla trasposta. La proprietà di ortogonalità implica che il modulo del determinante è unitario. La ortogonalità implica la conservazione dei prodotti interni. Ciò assicura, come si vedrà, la invarianza delle potenze, energie e moduli dei vettori ².

$$\mathbf{T}_0^{-1} = \mathbf{T}_0^t = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Per l'ortogonalità della matrice la trasformazione inversa si ottiene applicando la trasposta \mathbf{T}_0^t alle variabili di Park. Cioè

$$\begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_0^t \begin{bmatrix} v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_f = \mathbf{T}_0^t \mathbf{v}_p \quad (3)$$

VETTORE SPAZIALE

Le componenti v_α , v_β definiscono la variabile complessa (vettore spaziale o vettore di Park)

² La conservazione dei prodotti interni consiste nella seguente proprietà. Siano $\mathbf{a}_p = \mathbf{T}_0 \mathbf{a}_f$, $\mathbf{b}_p = \mathbf{T}_0 \mathbf{b}_f$.

Allora $\mathbf{a}_p^t \mathbf{b}_p = \mathbf{a}_f^t \mathbf{b}_f$.

$$\bar{v}(t) = v_\alpha + jv_\beta \quad v_\alpha = \text{Re}(\bar{v}) \quad v_\beta = \text{Im}(\bar{v}) \quad (4)$$

Introdotta il vettore spaziale, alla trasformazione (2) si può dare la seguente forma più diretta ed espressiva³

$$\bar{v}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} [v_a + \bar{\alpha}v_b + \bar{\alpha}^2v_c] \quad \begin{aligned} \bar{\alpha} &= e^{j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \bar{\alpha}^2 &= \bar{\alpha}^* = e^{-j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$v_0(t) = \frac{v_a + v_b + v_c}{\sqrt{3}}$$

Alle (5) si possono dare anche le forme matriciali

$$\bar{v}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} \quad v_0(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$$

La variabile complessa \bar{v} (vettore spaziale) e lo scalare v_0 (componente omopolare) identificano completamente il sistema trifase. Da notare che il vettore spaziale, invariante rispetto ad un termine additivo comune alle variabili di fase, costituisce la componente trifase pura del sistema, cioè indipendente dalla componente omopolare (il vettore tensione non dipende dal riferimento delle tensioni di fase). L'angolo, in valore e segno, del vettore spaziale dipende dall'ordine (arbitrario) e dal senso ciclico assegnato alle variabili di fase.

Le variabili di fase sono a loro volta esprimibili dalla forma vettoriale della (3):

$$v_a = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Re}(\bar{v}) + \frac{v_0}{\sqrt{3}} \quad v_b = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Re}(\bar{\alpha}^2\bar{v}) + \frac{v_0}{\sqrt{3}} \quad v_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Re}(\bar{\alpha}\bar{v}) + \frac{v_0}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

Le (6) hanno una notevole interpretazione geometrica per un sistema puro (omopolare nulla). Poste le variabili di fase in corrispondenza con tre direzioni nel piano complesso, la fase a sull'asse α e le altre a 120° nel senso ciclico positivo, la proiezione del vettore su queste direzioni orientate fornisce (a meno del coefficiente $\sqrt{2/3}$) il valore istantaneo delle variabili di fase (Fig. 1).

Tensioni concatenate

Ad una sezione trifase sono definibili e misurabili le tensioni concatenate. Il vettore spaziale tensione è calcolabile dalle sole tensioni concatenate. Essendo queste a somma nulla, esistono numerose espressioni equivalenti.

$$v_\alpha = \frac{v_{ab} - v_{ca}}{\sqrt{6}} \quad v_\beta = \frac{v_{bc}}{\sqrt{2}}$$

³ Si indica con $\bar{\alpha}$ l'operatore di rotazione di 120° , per uniformità con la simbologia dei componenti simmetrici. Non lo si confonda con l'indice (non soprasssegnato) della prima componente su assi fissi.

$$\bar{v} = \frac{v_{ab} - v_{ca} + j\sqrt{3}v_{bc}}{\sqrt{6}} = \frac{v_{ab} - v_{ca} - j\sqrt{3}(v_{ab} + v_{ca})}{\sqrt{6}} = \frac{2v_{ab} + v_{bc} + j\sqrt{3}v_{bc}}{\sqrt{6}} = \frac{-2v_{ca} - v_{bc} + j\sqrt{3}v_{bc}}{\sqrt{6}}$$

Le tensioni concatenate dipendono dal solo vettore spaziale secondo le

$$v_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re}[(\sqrt{3} + j)\bar{v}] \quad v_{bc} = \sqrt{2} \operatorname{Re}[-j\bar{v}] \quad v_{ca} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re}[(-\sqrt{3} + j)\bar{v}]$$

In Fig. 2 si visualizzano le relazioni tra il vettore spaziale tensione e i valori istantanei delle tensioni concatenate. I valori istantanei sono le proiezioni sulle direzioni indicate del vettore spaziale moltiplicato per $\sqrt{2}$.

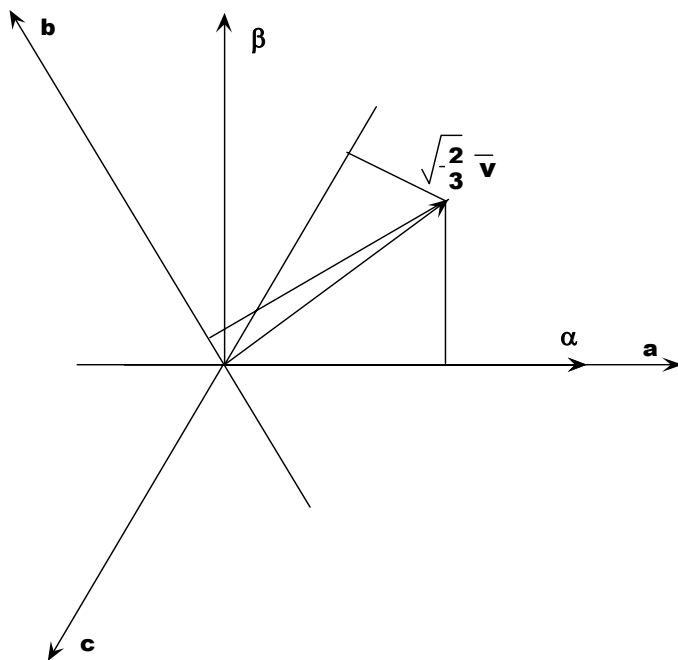


Fig. 1.

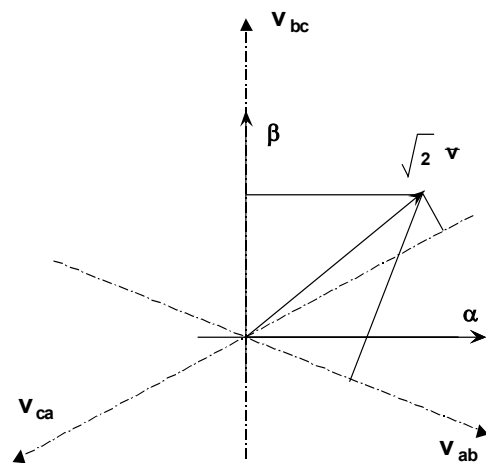


Fig. 2.

Casi particolari

a) Consideriamo un sistema sinusoidale simmetrico di tensioni di fase di senso ciclico diretto:

$$v_a = \sqrt{2}V_f \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v_b = \sqrt{2}V_f \cos(\omega t - 2\pi/3 + \varphi)$$

$$v_c = \sqrt{2}V_f \cos(\omega t + 2\pi/3 + \varphi)$$

Applicata la (2) o direttamente la (5) si ottiene un vettore spaziale di modulo costante e dotato di velocit  angolare uniforme, pari alla pulsazione ω , in senso positivo (Fig. 3):

$$v_\alpha = \sqrt{3}V_f \cos(\omega t + \varphi) \quad v_\beta = \sqrt{3}V_f \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\bar{v} = \bar{V}_1 e^{j\omega t} \quad v_0 = 0 \quad \text{con } \bar{V}_1 = \sqrt{3}V_f e^{j\varphi}$$

b) Un analogo sistema sinusoidale simmetrico ma di senso ciclico inverso:

$$v_a = \sqrt{2}V_f \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v_b = \sqrt{2}V_f \cos(\omega t + 2\pi / 3 + \varphi)$$

$$v_c = \sqrt{2}V_f \cos(\omega t - 2\pi / 3 + \varphi)$$

risulta in un vettore spaziale di modulo costante e dotato di velocità angolare uniforme in senso negativo:

$$\bar{v} = \bar{V}_{-1} e^{-j\omega t} \quad v_0 = 0 \quad \text{con} \quad \bar{V}_{-1} = \sqrt{3}V_f e^{-j\varphi}$$

c) Una terna sinusoidale generica dà luogo ad un vettore spaziale risultante dalla somma di due termini: uno costante in modulo e ruotante in senso positivo, l'altro costante in modulo e ruotante in senso negativo (a ciò si può pervenire anche per sovrapposizione):

$$\bar{v} = \bar{V}_1 e^{j\omega t} + \bar{V}_{-1} e^{-j\omega t}$$

Inoltre è presente il termine omopolare se la somma dei valori istantanei di fase non è zero. Il vettore nel piano di Park descrive un'ellisse (Fig. 4). Il caso di terna sinusoidale generica sarà ripreso in seguito.

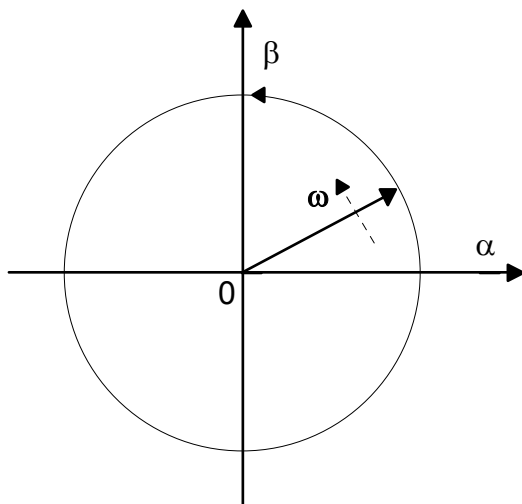


Fig. 3.

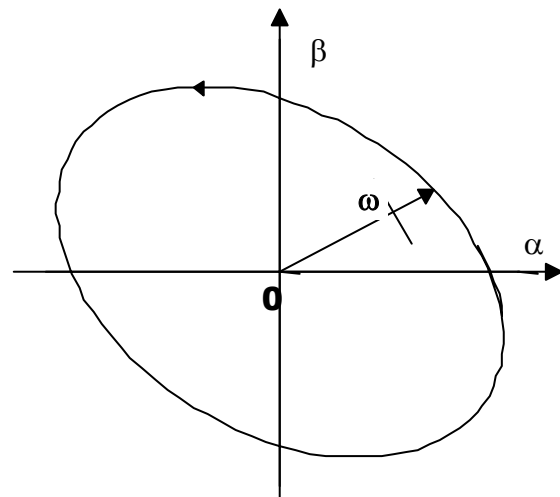


Fig. 4.

RELAZIONI COSTITUTIVE

La trasformazione di Park è applicabile, come detto, a terne di variabili, come tensioni, correnti, flussi concatenati, cariche elettriche, ecc. Si esaminano ora come ne sono trasformati i legami tra questi (impedenze o ammettenze in senso generalizzato).

Consideriamo ad esempio una terna di flussi concatenati espressi in funzione delle correnti. In forma matriciale, indicata con L_f la matrice 3x3 di induttanze, si ha (il pedice f indica grandezze di fase, o fisiche):

$$\Psi_f = L_f i_f \quad (7)$$

Applicata la trasformazione di Park (2) alle variabili, si ottengono le variabili trasformate (pedice p):

$$\Psi_p = T_0 \Psi_f \quad \mathbf{i}_p = T_0 \mathbf{i}_f \quad (8)$$

Dalla seconda delle (8) si ha anche $\mathbf{i}_f = T_0^t \mathbf{i}_p$. Sostituendo quest'ultima nella (7) e sostituendo il risultato nella prima delle (8) si ottiene:

$$\begin{aligned} \Psi_p &= L_p \mathbf{i}_p \\ \text{dove} \quad L_p &= T_0 L_f T_0^t \end{aligned} \quad (9)$$

è la matrice delle induttanze trasformate. Si noti che sussiste anche il legame inverso:

$$L_f = T_0^t L_p T_0$$

Come caso particolare importante, consideriamo un sistema di induttori costruttivamente simmetrico: nella (7) siano uguali tra loro le auto induttanze ed uguali tra loro tutte le mutue induttanze. Cioè sia:

$$L_f = \begin{bmatrix} L_f & L_m & L_m \\ L_m & L_f & L_m \\ L_m & L_m & L_f \end{bmatrix} \quad (10)$$

Svolgendo i calcoli, la (9) dà luogo in questo caso a:

$$L_p = T_0 \begin{bmatrix} L_f & L_m & L_m \\ L_m & L_f & L_m \\ L_m & L_m & L_f \end{bmatrix} T_0^t = \begin{bmatrix} L_f - L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_f - L_m & 0 \\ 0 & 0 & L_f + 2L_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & L_\beta & 0 \\ 0 & 0 & L_0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

con $L_\alpha = L_\beta = L_f - L_m$, $L_0 = L_f + 2L_m$.

La matrice trasformata risulta diagonale. Tale importante risultato consente di ottenere tre relazioni indipendenti tra flussi e correnti nel dominio di Park, quindi relazioni più semplici rispetto a quelle nelle variabili di fase. Si osservi inoltre la facilità di calcolo dell'inversa della (11).

Quanto ottenuto si generalizza a sistemi simmetrici di parametri di altro tipo: resistenze, capacità, conduttanze, elastanze, induttanze inverse. Matrici di parametri del tipo della (10), ovvero con termini uguali sulla diagonale principale e termini uguali fuori dalla diagonale, si dicono a simmetria trifase.

Inoltre, come caso particolare della (10) a termini mutui nulli, la matrice, ad es. di resistenze uguali, coincide con la propria trasformata:

$$\mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_p = \mathbf{R}_f \quad (12)$$

Quanto visto permette di disaccoppiare, nelle variabili trasformate, sistemi di impedenze costruttivamente simmetrici, cioè la grande maggioranza dei casi.

Ciò dà luogo nelle variabili trasformate scalari a relazioni formalmente identiche a tre elementi monofase disaccoppiati. L'eguaglianza inoltre dei parametri relativi agli assi α e β permette di unire le corrispondenti relazioni scalari in una sola relazione complessa, di forma analitica, nei vettori spaziali. Infatti sia ad es.:

$$\Psi_\alpha = L_\alpha i_\alpha \quad \Psi_\beta = L_\beta i_\beta$$

Se, e solo se, $L_\alpha = L_\beta = L$ l'applicazione della (4) consente la notazione vettoriale:

$$\boldsymbol{\psi} = L \mathbf{i}$$

Ne segue la rappresentazione di elementi circuitali trifase con circuiti equivalenti monofase nei vettori spaziali e, separatamente, nei componenti omopolari. Applicata la trasformazione vettoriale di Park a tutti gli elementi della rete trifase si perviene alla rete trasformata nei vettori spaziali come variabili. La rete sarà soggetta ai corrispondenti generatori trasformati.

Generalizzando quanto sopra, si consideri una generica relazione (a coefficienti reali) tra due terne di grandezze trifase, del tipo:

$$\mathbf{a}_f = \mathbf{Z}_f \mathbf{b}_f$$

La trasformazione di Park modifica la relazione nella:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{Z}_p \mathbf{b}_p \quad \text{con} \quad \mathbf{Z}_p = \mathbf{T}_0 \mathbf{Z}_f \mathbf{T}_0^t$$

La precedente si può sempre antitrasformare

$$\mathbf{Z}_f = \mathbf{T}_0^t \mathbf{Z}_p \mathbf{T}_0$$

Esempio

Per evidenziare le caratteristiche dell'analisi di Park si considera il semplice esempio (Fig. 5) di un carico costituito da un induttore trifase costruttivamente simmetrico costituito da induttanze come in (10) e con resistenze proprie come in (12).

Il sistema nelle variabili di fase risulta, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & L_m & L_m \\ L_m & L_f & L_m \\ L_m & L_m & L_f \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

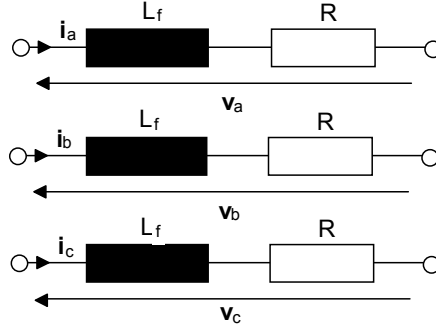


Fig. 5

Si applica ora la trasformazione di Park su assi fissi T_0 a tensioni e correnti. Si noti che, poiché la matrice di trasformazione su assi fissi è costante, $\frac{d}{dt} \mathbf{i}_f = T_0^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_p$. Si perviene all'espressione:

$$\begin{bmatrix} v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f - L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_f - L_m & 0 \\ 0 & 0 & L_f + 2L_m \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_0(t) \end{bmatrix}$$

che, per la diagonalità delle matrici, è costituita da tre equazioni indipendenti.

Poiché i parametri relativi alle componenti α e β sono uguali, è possibile riunire le prime due relazioni in un'unica forma nei vettori spaziali. Posto $L = L_f - L_m$ e $L_0 = L_f + 2L_m$ si ha

$$\bar{v} = L \frac{d\bar{i}}{dt} + R\bar{i} \quad v_0 = L_0 \frac{di_0}{dt} + Ri_0 \quad (14)$$

Le relazioni trovate, la prima complessa, la seconda reale, costituiscono il modello trasformato secondo Park del sistema di induttori (13).

Si consideri ora una terna di tensioni sinusoidali simmetriche in senso ciclico positivo: $\bar{v} = \bar{V}e^{j\omega t}$, $v_0 = 0$. A regime la corrente avrà lo stesso tipo di andamento della tensione: $\bar{i} = \bar{I}e^{j\omega t}$, $i_0 = 0$. Inoltre $\frac{d\bar{i}}{dt} = j\omega\bar{I}e^{j\omega t}$. La relazione vettoriale di regime è quindi:

$$\bar{V}e^{j\omega t} = (R\bar{I} + j\omega L\bar{I})e^{j\omega t} \quad (15)$$

A parte le rotazioni $e^{j\omega t}$ si ritrova il classico diagramma fasoriale.

Cambiato in negativo il senso ciclico, cioè sia $\bar{v} = \bar{V}e^{-j\omega t}$, $v_0 = 0$, il regime diventa

$$\bar{V}e^{-j\omega t} = (R\bar{I} - j\omega L\bar{I})e^{-j\omega t}$$

A prescindere dalla rotazione comune, il diagramma nei vettori spaziali a regime presenta relazioni di fase opposte rispetto al caso precedente: deve essere coniugato per ritrovare il diagramma fasoriale. Ciò è dovuto al fatto che i fasori rappresentano sfasamenti nel tempo tra sinusoidi, i vettori spaziali sfasamenti spaziali (più esattamente relazioni tra terne di grandezze istantanee che appaiono spaziali nel piano complesso).

ESEMPIO. TRANSITORIO RL

La potenza di rappresentazione della trasformazione nei vettori spaziali si manifesta appieno in regime dinamico. Quale esempio semplice consideriamo il transitorio di inserzione del carico R, L trifase simmetrico (13) di Fig. 5 su alimentazione trifase simmetrica diretta.

Il sistema è retto dall'equazione lineare complessa data dalla prima delle (14) a forzante variabile $\bar{v}(t) = \bar{V}e^{j\omega t}$. Poiché la equazione è analitica, l'integrazione si avvale delle usuali regole valide per le equazioni differenziali lineari a parametri costanti. La soluzione è il seguente andamento del vettore spaziale corrente di Park (le omopolari sono identicamente nulle):

$$\bar{i}(t) = \frac{\bar{V}}{R + j\omega L} \left[e^{j\omega t} - e^{-\frac{R}{L}t} \right] = \frac{\bar{V}e^{j\omega t}}{R + j\omega L} \left[1 - e^{-\left(j\omega + \frac{R}{L}\right)t} \right]$$

L'andamento del vettore nel piano di Park rappresenta compiutamente e sinteticamente il transitorio (Fig. 6). Le proiezioni sugli assi delle fasi (come in Fig. 1) costituiscono gli andamenti delle correnti di fase (a meno del coefficiente $\sqrt{2/3}$).

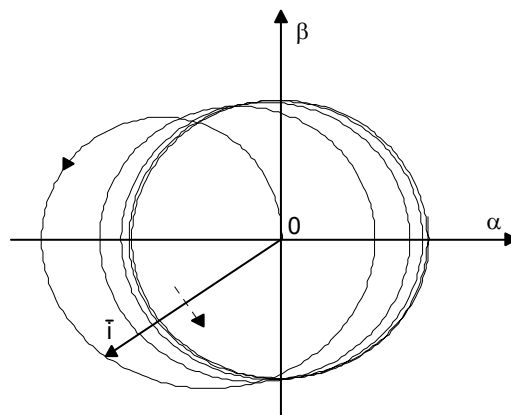


Fig. 6.

TRASFORMAZIONE DI PARK E COMPONENTI SIMMETRICI

È noto che la trasformazione dei componenti simmetrici (o trasformazione delle sequenze) è una tecnica efficace per trattare i sistemi trifase in regime sinusoidale. Si applica nel dominio dei fasori (costanti complesse in corrispondenza biunivoca con forme d'onda sinusoidali isofrequenziali).

La trasformazione dei componenti simmetrici utilizza la seguente matrice a coefficienti complessi costanti (qui indicata nella forma razionale):

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ 1 & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Applicata alla terna di fasori di fase $\bar{V}_a \bar{V}_b \bar{V}_c$ fornisce i fasori di sequenza diretta, inversa ed omopolare.

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} \quad (17)$$

L'inversa della (16) è pari alla propria trasposta coniugata. $\bar{\mathbf{S}}^{-1} = \bar{\mathbf{S}}^{*t}$ (Matrici con tale proprietà sono dette matrici unitarie, estensione al campo complesso delle matrici ortogonali). La trasformazione inversa si ottiene come

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{S}}^{*t} \begin{bmatrix} \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Si vogliono ora riconoscere le relazioni tra la trasformazione dei componenti simmetrici e la trasformazione di Park, per quanto riguarda sia le variabili che le impedenze.

Per quanto concerne le impedenze, si consideri la seguente relazione matriciale tra fasori trifase:

$$\bar{\mathbf{V}}_f = \bar{\mathbf{Z}}_f \bar{\mathbf{I}}_f$$

Con procedimento analogo alla (9), l'applicazione dei componenti simmetrici conduce alla relazione nelle grandezze di sequenza:

$$\bar{\mathbf{V}}_s = \bar{\mathbf{Z}}_s \bar{\mathbf{I}}_s \quad \text{con} \quad \bar{\mathbf{Z}}_s = \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{Z}}_f \bar{\mathbf{S}}^{*t}$$

Nel caso di simmetria tra le impedenze di fase

$$\bar{\mathbf{Z}}_f = \begin{bmatrix} \bar{Z} & \bar{Z}' & \bar{Z}' \\ \bar{Z}' & \bar{Z} & \bar{Z}' \\ \bar{Z}' & \bar{Z}' & \bar{Z} \end{bmatrix} \quad \text{risulta} \quad \bar{\mathbf{Z}}_s = \begin{bmatrix} \bar{Z} - \bar{Z}' & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z} - \bar{Z}' & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z} + 2\bar{Z}' \end{bmatrix}$$

Il risultato è formalmente identico a quanto ottenuto in (11) applicando la trasformazione di Park. Se ne conclude che, in caso di simmetria, le impedenze (in senso lato) di Park e di sequenza coincidono.

Questo risultato ha notevole rilevanza pratica. Usualmente i parametri circuitali di sequenza sono noti, o determinabili con procedure standardizzate. Gli stessi valori dei parametri sono richiesti nelle formulazioni con le variabili di Park. Si presti attenzione, nel considerare tali uguaglianze, al fatto che le impedenze, o ammettenze di sequenza sono in genere costanti complesse, mentre i parametri di Park sono sempre costanti reali. Le corrispondenze sono evidenziate nella seguente tabella:

| SEQUENZE | PARK |
|---------------------------------------|----------------------------|
| $R_d = R_i$ | $R_\alpha = R_\beta = R_d$ |
| R_0 | R_0 |
| $X_d = X_i = \omega L_d = \omega L_i$ | $L_\alpha = L_\beta = L_d$ |
| $X_0 = \omega L_0$ | L_0 |
| $B_d = B_i = \omega C_d = \omega C_i$ | $C_\alpha = C_\beta = C_d$ |
| $B_0 = \omega C_0$ | C_0 |

Nel caso generale, definita la matrice complessa:

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{T}_0 \bar{\mathbf{S}}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

valgono le relazioni di passaggio da impedenze di sequenza a impedenze di Park o viceversa:

$$\mathbf{Z}_p = \bar{\mathbf{g}} \bar{\mathbf{Z}}_s \bar{\mathbf{g}}^{-1} \quad \bar{\mathbf{Z}}_s = \bar{\mathbf{g}}^{-1} \mathbf{Z}_p \bar{\mathbf{g}}$$

Si ricordi che la matrice \mathbf{Z}_p deve sempre risultare a termini reali. Mediante la relazione generale si riconosce che solo se la matrice trasformata è diagonale con i primi due termini uguali, essa è la stessa sia secondo la trasformazione di Park che delle sequenze.

Quanto alle variabili, la procedura di passaggio da una formulazione all'altra è la seguente. Si ricordi la relazione formale tra una grandezza sinusoidale $v(t)$ ed il proprio fasore \bar{V} ($\bar{V} = V e^{j\phi}$):

$$v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\bar{V}e^{j\omega t}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{V}e^{j\omega t} + \bar{V}^*e^{-j\omega t}) \quad (19)$$

Una terna sinusoidale di valori istantanei $v_a(t), v_b(t), v_c(t)$ si può esprimere allora in funzione dei rispettivi fasori $\bar{V}_a, \bar{V}_b, \bar{V}_c$ come:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} e^{j\omega t} + \begin{bmatrix} \bar{V}_a^* \\ \bar{V}_b^* \\ \bar{V}_c^* \end{bmatrix} e^{-j\omega t} \right)$$

Dalla prima delle (5) e la (18) si ha:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} e^{j\omega t} + \begin{bmatrix} \bar{V}_a^* \\ \bar{V}_b^* \\ \bar{V}_c^* \end{bmatrix} e^{-j\omega t} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \end{bmatrix} \left(\bar{\mathbf{S}}^{*t} \begin{bmatrix} \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} e^{j\omega t} + \bar{\mathbf{S}}^t \begin{bmatrix} \bar{V}_d^* \\ \bar{V}_i^* \\ \bar{V}_0^* \end{bmatrix} e^{-j\omega t} \right) \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\bar{v}(t) = \bar{V}_d e^{j\omega t} + \bar{V}_i^* e^{-j\omega t} \quad (20)$$

Quindi in regime sinusoidale il vettore spaziale è costituito da due termini controrotanti, di ampiezza e fase, rispettivamente, pari al fasore di sequenza diretta ed al coniugato del fasore di sequenza inversa.

Per quanto riguarda la omopolare, sempre dalla (5) e la (18):

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} e^{j\omega t} + \begin{bmatrix} \bar{V}_a^* \\ \bar{V}_b^* \\ \bar{V}_c^* \end{bmatrix} e^{-j\omega t} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\bar{\mathbf{S}}^{*t} \begin{bmatrix} \bar{V}_s \\ \bar{V}_i \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} e^{j\omega t} + \bar{\mathbf{S}}^t \begin{bmatrix} \bar{V}_s^* \\ \bar{V}_i^* \\ \bar{V}_0^* \end{bmatrix} e^{-j\omega t} \right) \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$v_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{V}_0 e^{j\omega t} + \bar{V}_0^* e^{-j\omega t}) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\bar{V}_0 e^{j\omega t})$$

Confrontando con la (19) si riconosce che, in regime sinusoidale, la componente omopolare di Park è una senoide il cui fasore coincide con il fasore di sequenza omopolare. In altre parole, le omopolari di sequenza e di Park coincidono, ciò ne giustifica il medesimo nome.

POTENZE NELLE VARIABILI DI PARK

In quanto trasformazione ortogonale, la trasformazione di Park non altera le potenze. Infatti, considerate le tensioni di fase v_a, v_b, v_c e le correnti i_a, i_b, i_c di un sistema trifase, la potenza istantanea trifase è

$$p(t) = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \mathbf{v}_f^t \mathbf{i}_f$$

Applicata la trasformazione di Park alle tensioni e correnti e ricordando che per la ortogonalità $\mathbf{T}\mathbf{T}^t = \mathbf{I}$, si ha:

$$\mathbf{v}_f^t \mathbf{i}_f = \mathbf{v}_p^t \mathbf{T}\mathbf{T}^t \mathbf{i}_p = \mathbf{v}_p^t \mathbf{i}_p$$

Quindi la potenza trifase può essere espressa come:

$$p(t) = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta + v_0 i_0 = \operatorname{Re}(\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{i}}^*) + v_0 i_0$$

Chiamiamo potenza omopolare la potenza istantanea associata alle componenti omopolari

$$p_0(t) = v_0 i_0$$

e potenza reale di Park la potenza istantanea del sistema trifase puro

$$p_p(t) = v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta = \operatorname{Re}(\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{i}}^*) \quad (22)$$

La totale potenza istantanea è quindi $p(t) = p_p + p_0$. Si definisce inoltre potenza immaginaria la funzione

$$q_p(t) = v_\beta i_\alpha - v_\alpha i_\beta = \operatorname{Im}(\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{i}}^*) \quad (23)$$

e potenza complessa di Park

$$\bar{a}_p(t) = p_p(t) + jq_p(t) = \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{i}}^* \quad (24)$$

definizioni valide nei valori istantanei ed in regime qualsiasi. In regime sinusoidale simmetrico ed equilibrato di sequenza diretta le potenze p_p, q_p, \bar{a}_p risultano costanti e coincidono rispettivamente con le potenze attiva, reattiva e complessa (apparente complessa).

Le grandezze energetiche istantanee ora definite (22-24) godono delle seguenti proprietà.

- Sono grandezze algebriche il cui segno dipende dalle direzioni di riferimento assunte per tensioni e correnti.
- Sono conservative, nel senso che, per ciascuna di esse separatamente, la somma algebrica delle potenze assorbite estesa a tutti gli elementi trifase di una rete isolata è nulla⁴.
- Sono misurabili per mezzo di combinazioni lineari a coefficienti costanti di prodotti tra tensioni e correnti di fase.
- Il segno di q_p dipende dal senso ciclico assegnato alle fasi.

In regime periodico le medie estese al periodo delle potenze istantanee P_p, P_0, Q_p, \bar{A}_p godono ovviamente delle stesse proprietà enunciate per i valori istantanei. La media P_p della $p_p(t)$ è la potenza attiva del trifase puro.

COMPONENTI TRIFASE

A riepilogo di quanto esposto, sugli elementi trifase seguenti valgono le relazioni riportate in Tabella.

| | Resistori simmetrici | Induttori simmetrici | Condensatori simmetrici | Generatori sinusoidali simmetrici (seq. diretta) |
|-----------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Eq. di Ohm su assi fissi | $\bar{v} = R\bar{i}$ $v_0 = R_0 i_0$ | $\bar{v} = L \frac{d\bar{i}}{dt}$ $v_0 = L_0 \frac{di_0}{dt}$ | $\bar{i} = C \frac{d\bar{v}}{dt}$ $i_0 = C_0 \frac{dv_0}{dt}$ | $\bar{v} = \bar{V} e^{j\omega t}$ $\bar{a}_s = \bar{A}_s e^{j\omega t}$ |
| potenza istantanea | $Ri^2 + R_0 i_0^2$ | - | - | - |
| potenza media (attiva) | $RI^2 + R_0 I_0^2$ | - | - | - |
| energia istantanea | - | $\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} L_0 i_0^2$ | $\frac{1}{2} Cv^2 + \frac{1}{2} C_0 v_0^2$ | - |
| energia media | - | $\frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} L_0 I_0^2$ | $\frac{1}{2} CV^2 + \frac{1}{2} C_0 V_0^2$ | - |

⁴ Nell'ipotesi che le tre tensioni di fase all'esterno degli elementi trifase soddisfino separatamente alle medesime relazioni alle maglie, segue, per la linearità della trasformazione, che alle stesse relazioni soddisfano separatamente le componenti di Park delle tensioni. Analogamente se le tre correnti di linea soddisfano separatamente alle medesime relazioni ai nodi dello stesso grafo delle tensioni, alle stesse relazioni soddisfano le componenti di Park delle correnti. Per il teorema di Tellegen è quindi nulla la somma estesa a tutti i lati del grafo dei prodotti fra coppie qualsiasi di componenti di tensione e corrente. Da cui la conservazione delle potenze in quanto somme di tali prodotti.

Si noti che, se i termini omopolari sono assenti, come avviene in molti casi, le espressioni diventano formalmente simili alle corrispondenti in monofase, pur di sostituire alle grandezze istantanee o medie i vettori spaziali.

TRASFORMAZIONE DI PARK SU ASSI ROTANTI

La trasformazione di Park (1), chiamata su assi fissi, è un caso particolare di una trasformazione più generale, detta su assi rotanti. La matrice (ortogonale) della trasformazione generale è la seguente:

$$\mathbf{T}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta + 2\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Questa, applicata ad una terna di valori istantanei di fase $v_a(t)$, $v_b(t)$, $v_c(t)$ dà luogo ai tre componenti di Park: componenti sugli assi d , q e componente omopolare:

$$\begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta) \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta)^t \begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Il parametro angolare $\theta(t)$ è una generica funzione del tempo. Questi e la propria derivata temporale sono interpretabili rispettivamente come posizione e velocità angolare degli assi di riferimento di Park d e q rispetto ad un riferimento fisso definito dalla posizione $\theta=0$.

Nel caso particolare di assi fissi, posto $\theta=0$ la trasformazione si riduce alla (1). Da notare che la trasformazione su assi fissi potrebbe essere ottenuta dalla (35) per qualsiasi valore di θ , purché costante. La scelta fatta è dettata esclusivamente da consuetudine.

Analogamente al caso di assi fissi, le componenti v_d , v_q definiscono la variabile complessa (vettore spaziale su assi rotanti)

$$\bar{v}(t) = v_d + jv_q$$

La parte reale v_d e il coefficiente dell'unità immaginaria v_q del vettore di Park si possono considerare le componenti secondo gli assi.

La (35) può anche essere espressa dal prodotto della (1) per la matrice di rotazione $\mathbf{H}(\theta)$:

$$\mathbf{T}(\theta) = \mathbf{H}(\theta)\mathbf{T}_0 \quad \text{con} \quad \mathbf{H}(\theta) = \mathbf{T}(\theta)\mathbf{T}_0^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione $\mathbf{H}(\theta)$ ruota le componenti d e q dell'angolo θ , mentre lascia inalterata la componente omopolare. Questa trasformazione gode delle proprietà della rotazione geometrica, in particolare:

$$\mathbf{H}(\theta)^t = \mathbf{H}(\theta)^{-1} \quad (\text{ortogonalità})$$

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{1} \quad (\text{matrice unità})$$

$$\mathbf{H}(\theta + 2k\pi) = \mathbf{H}(\theta) \quad (k \text{ intero})$$

$$\mathbf{H}(\theta_1 + \theta_2) = \mathbf{H}(\theta_2)\mathbf{H}(\theta_1) = \mathbf{H}(\theta_1)\mathbf{H}(\theta_2)$$

$$\mathbf{H}(-\theta) = \mathbf{H}(\theta)^{-1}$$

La $\mathbf{H}(\theta)$ si applica a una terna di variabili trasformate con Park su assi fissi ottenendo la corrispondente terna su assi rotanti. Componendo poi i termini d e q di ambedue le terne nei vettori spaziali, si riconosce che la sottomatrice $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ equivale al termine di rotazione nel campo complesso $e^{-j\theta}$ (da notare che $e^{-j\theta}$ ha le stesse proprietà di rotazione elencate sopra).

Vale pertanto il seguente risultato notevole. Considerato un vettore di Park \bar{v}^0 relativo ad assi fissi ($\theta=0$), lo stesso riferito ad assi rotanti definiti da uno $\theta(t)$ generico risulta

$$\bar{v}(t) = \bar{v}^0(t)e^{-j\theta(t)} \quad \bar{v}^0(t) = \bar{v}(t)e^{j\theta(t)} \quad (37)$$

mentre la componente omopolare rimane inalterata attraverso il cambiamento di assi. Il segno dell'angolo nelle formule (37) è chiarito in Fig. 13.

La (37) si generalizza alla trasformazione tra due sistemi di assi in moto generico pur di sostituire a θ la differenza $\theta_2 - \theta_1$ tra i parametri angolari di ciascun sistema di assi.

La trasformazione tra riferimenti diversi altera di un valore comune gli angoli e le velocità di rotazione di un insieme dei vettori spaziali, senza modificarne le posizioni ed i movimenti relativi tra di essi. Non ne sono alterate le grandezze energetiche, dipendenti, come si vedrà, dai moduli dei vettori e dagli sfasamenti tra questi.

La trasformazione su assi rotanti consente in molti casi drastiche semplificazioni nella struttura delle equazioni. Un caso particolare importante è il seguente. Si consideri una terna sinusoidale simmetrica di sequenza diretta su assi fissi $\bar{v}^0 = \bar{V}e^{j\omega t}$. Applicata la (37) si ottiene

$$\bar{v} = \bar{V}e^{j(\omega t - \theta)} \quad (38)$$

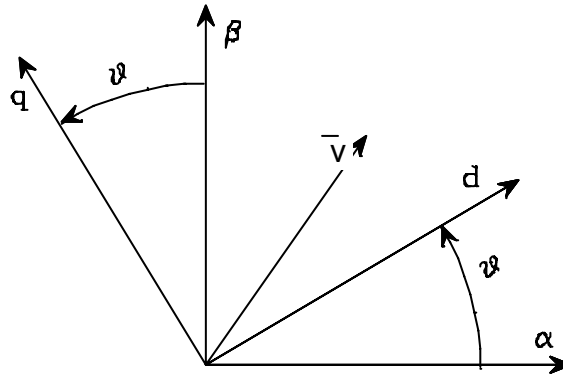


Fig. 13

Se ora si assume $\theta = \omega t$ (assi rotanti alla pulsazione ω), il vettore spaziale risulta costante (pari al fasore di sequenza diretta): $\bar{v}(t) = \bar{V}$.

Le notevoli implicazioni di tale risultato saranno ora evidenziate sull'esempio (13). Trasformate tutte le variabili su assi rotanti alla pulsazione ω di alimentazione, la (15) di regime si traduce nella seguente relazione tra grandezze costanti:

$$\bar{V} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I}$$

Per quanto detto sopra al riguardo dei componenti simmetrici, la precedente coincide con la relazione nei fasori di sequenza diretta che si formula nell'analisi tradizionale del regime sinusoidale.

I risultati discussi in precedenza relativi ad assi fissi si estendono facilmente ad assi rotanti. Per quanto riguarda i vettori spaziali, si utilizza la (37). La trasformazione di impedenze da assi fissi a rotanti si avvale della matrice $\mathbf{H}(\theta)$. Per la precisione, indicata con \mathbf{Z}^0 , la matrice di parametri su assi fissi, la corrispondente matrice \mathbf{Z} su assi rotanti è fornita dalla:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}(\theta)\mathbf{Z}^0\mathbf{H}(\theta)^{-1} \quad (39)$$

Si verifica facilmente che la (39) non altera le matrici trasformate di matrici simmetriche (11) e (12). Tali risultati sono quindi validi per qualsiasi sistema di assi di riferimento.

Trasformazione delle derivate.

La trasformazione tempo-variante $\mathbf{T}(\theta(t))$ non è indifferente all'operazione di derivazione. Definita la trasformazione con le (36), ci si chiede come si trasformano le derivate di variabili di fase. Derivando rispetto al tempo la seconda delle (36) si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta)^t \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} + \frac{d\mathbf{T}(\theta)^t}{dt} \begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta)^t \left(\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} + \mathbf{T}(\theta) \frac{d\mathbf{T}(\theta)^t}{dt} \begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} \right)$$

o meglio

$$\mathbf{T}(\theta) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} + \omega_p \mathbf{J} \begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \\ v_0(t) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\text{con} \quad \mathbf{J} = \mathbf{T}(\theta) \frac{d\mathbf{T}(\theta)^t}{d\theta} = \mathbf{H}(\theta) \frac{d\mathbf{H}(\theta)^t}{d\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \omega_p = \frac{d\theta}{dt}$$

Il risultato ottenuto appare più significativo nel campo complesso. Derivando la seconda delle (37) rispetto al tempo si ha:

$$\frac{d\bar{v}^0}{dt} = \left(\frac{d\bar{v}}{dt} + j\omega_p \bar{v} \right) e^{j\theta} \quad (41)$$

Questo risultato dà luogo ai termini aggiuntivi proporzionali a ω_p (termini 'mozionali') ogni qualvolta nelle equazioni appare la derivata di un vettore.

Le (40) e (41) hanno come conseguenza che nella trasformazione delle relazioni da assi fissi a rotanti valgono le regole di sostituzione indicate nella Tabella.

Osservando ancora le (38) e (41), l'analogia formale con i fasori è evidente: assunta $\omega_p = \omega$ pari alla pulsazione dell'alimentazione sinusoidale simmetrica, in regime sinusoidale simmetrico ed equilibrato (di sequenza diretta) i vettori spaziali si riducono a costanti e si ritrovano gli usuali diagrammi fasoriali di sequenza

TABELLA

| ASSI FISSI | ASSI ROTANTI alla velocità ω_p |
|-------------------------|-------------------------------------------|
| v_α | v_d |
| v_β | v_q |
| $\frac{dv_\alpha}{dt}$ | $\frac{dv_d}{dt} - \omega_p v_q$ |
| $\frac{dv_\beta}{dt}$ | $\frac{dv_q}{dt} + \omega_p v_d$ |
| \bar{v}^0 | \bar{v} |
| $\frac{d\bar{v}^0}{dt}$ | $\frac{d\bar{v}}{dt} + j\omega_p \bar{v}$ |

ESEMPIO. TRANSITORIO *RL* SU ASSI ROTANTI

Consideriamo nuovamente il transitorio di inserzione del carico *R, L* trifase simmetrico (13) di Fig. 5 su alimentazione trifase simmetrica diretta.

Consideriamo ora gli assi rotanti alla pulsazione ω dell'alimentazione. Per quanto visto si ottiene l'equazione vettoriale:

$$\bar{V} = L \frac{d\bar{i}(t)}{dt} + j\omega L \bar{i}(t) + R \bar{i}(t) \quad (42)$$

con termine forzante \bar{V} costante. Integrata come equazione differenziale lineare a parametri costanti si perviene all'espressione esplicita della corrente di Park:

$$\bar{i}(t) = \frac{\bar{V}}{R + j\omega L} \left[1 - e^{-\left(j\omega + \frac{R}{L}\right)t} \right]$$

Confrontato con il risultato ottenuto in precedenza, si riconosce che è lo stesso a meno di un cambiamento di riferimento. Ora il diagramma nel piano di Park rotante è ancora più significativo: il transitorio rotante e smorzato termina al valore costante pari al fasore di regime (Fig. 14).

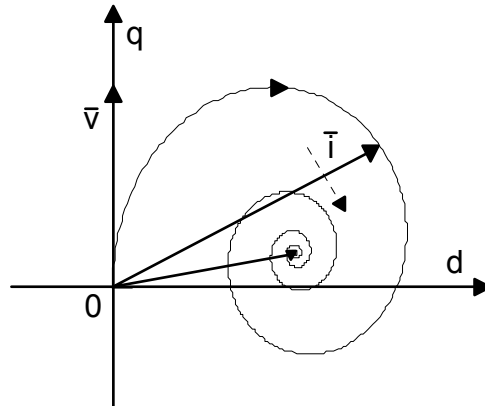


Fig. 14

POTENZE E VALORI EFFICACI SU ASSI ROTANTI

Tutte le espressioni delle potenze e dei valori efficaci, illustrate in precedenti paragrafi, sono indipendenti dalla posizione o velocità degli assi. Su assi rotanti è sufficiente sostituire i pedici d e q ai pedici α e β in tutte le espressioni e considerare, quando applicata, la trasformazione generale T in luogo della T_0 .

Per la dimostrazione basta applicare la (37) ai due termini del prodotto $\bar{v}\bar{i}^*$.
 Si riscrivono le formule principali.

$$p(t) = v_d i_d + v_q i_q + v_0 i_0 = \operatorname{Re}(\bar{v}\bar{i}^*) + v_0 i_0$$

$$p_p(t) = v_d i_d + v_q i_q = \operatorname{Re}(\bar{v}\bar{i}^*) \quad (43)$$

$$q_p(t) = v_q i_d - v_d i_q = \operatorname{Im}(\bar{v}\bar{i}^*) \quad (44)$$

$$\bar{a}_p(t) = p_p(t) + jq_p(t) = \bar{v}\bar{i}^* \quad (45)$$

$$v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = v_d^2 + v_q^2 + v_0^2 = v^2 + v_0^2 \quad \text{con} \quad v^2 = v_d^2 + v_q^2 = \bar{v}\bar{v}^* \quad (46)$$

$$V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 = V_d^2 + V_q^2 + V_0^2 = V^2 + V_0^2 \quad (V^2 = V_d^2 + V_q^2) \quad (47)$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T \bar{v}(t)\bar{v}(t)^* dt}$$

COMPONENTI TRIFASE SU ASSI ROTANTI

A complemento di quanto esposto, la Tabella degli elementi trifase, già illustrata, si completa nel modo seguente:

TABELLA

| | Resistori simmetrici | Induttori simmetrici | Condensatori simmetrici | Generatori sinusoidali simmetrici (di seq. diretta) a pulsazione ω |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Eq. di Ohm su assi fissi | $\bar{v} = R\bar{i}$ $v_0 = R_0 i_0$ | $\bar{v} = L \frac{d\bar{i}}{dt}$ $v_0 = L_0 \frac{di_0}{dt}$ | $\bar{i} = C \frac{d\bar{v}}{dt}$ $i_0 = C_0 \frac{dv_0}{dt}$ | $\bar{v} = \bar{V} e^{j\omega t}$ $\bar{a}_s = \bar{A}_s e^{j\omega t}$ |
| Eq. di Ohm su assi alla velocità ω_p | $\bar{v} = R\bar{i}$ $v_0 = R_0 i_0$ | $\bar{v} = L \frac{d\bar{i}}{dt} + j\omega_p L \bar{i}$ $v_0 = L_0 \frac{di_0}{dt}$ | $\bar{i} = C \frac{d\bar{v}}{dt} + j\omega_p C \bar{v}$ $i_0 = C_0 \frac{dv_0}{dt}$ | $\bar{v} = \bar{V} e^{j(\omega - \omega_p)t}$ $\bar{a}_s = \bar{A}_s e^{j(\omega - \omega_p)t}$ |
| potenza istantanea assorbita | $Ri^2 + R_0 i_0^2$ | - | - | - |
| potenza media (attiva) assorbita | $RI^2 + R_0 I_0^2$ | - | - | - |
| energia istantanea | - | $\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} L_0 i_0^2$ | $\frac{1}{2} Cv^2 + \frac{1}{2} C_0 v_0^2$ | - |
| energia media | - | $\frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} L_0 I_0^2$ | $\frac{1}{2} CV^2 + \frac{1}{2} C_0 V_0^2$ | - |

APPENDICE - DETERMINAZIONE A PRIORI DELLA TRASFORMAZIONE DI PARK.

Alla trasformazione di Park, in senso generale e nella forma indicata nel testo, si può giungere per via diretta a partire dalle proprietà che si vogliono soddisfatte. Ciò serve a giustificarne "a priori" la scelta, anche se ribalta in parte l'evoluzione storica che ha portato al formalismo.

Di tale processo di deduzione si vuole dare solo la traccia, senza affrontare le trattazioni analitiche alquanto laboriose. Le condizioni che si vogliono soddisfare sono, in un ordine logico, non certo l'unico, che ne permette in qualche modo la costruzione, le seguenti.

a) Trasformazione T di ordine 3 lineare a coefficienti reali, in generale non costanti. L'esclusione di coefficienti complessi è giustificata dall'applicarsi la trasformazione a valori istantanei reali e voler mantenere reali i valori trasformati.

b) Trasformazione che, applicata a matrici di impedenze a simmetria trifase del tipo

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z & Z' & Z' \\ Z' & Z & Z' \\ Z' & Z' & Z \end{bmatrix}$$

rende diagonale la impedenza trasformata $\mathbf{Z}_p = \mathbf{T}\mathbf{Z}\mathbf{T}^{-1}$

Per generalità della trasformazione che si vuole ottenere, questa deve essere indipendente dai valori delle impedenze stesse (con impedenza si intende in senso lato matrici a termini reali di resistenze, induttanze o capacità). Questa proprietà permette di disaccoppiare, nelle variabili trasformate, sistemi di impedenze costruttivamente a simmetria trifase, cioè la grande maggioranza dei casi.

c) Trasformazione ortogonale. Tale condizione, non strettamente indispensabile, fa coincidere la trasformazione inversa con la trasposta $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}'$. La conservazione dei prodotti interni assicura la invarianza delle potenze, energie e moduli dei vettori.

d) Le precedenti condizioni non sono particolarmente vincolanti e sono soddisfatte anche da trasformazioni a coefficienti costanti. Il vincolo più restrittivo e che determina l'effettiva struttura della trasformazione è il seguente: considerate matrici di impedenze a simmetria ciclica dipendenti da un angolo α , del tipo:

$$\mathbf{Z}(\alpha) = Z \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\alpha + 2\pi/3) & \cos(\alpha - 2\pi/3) \\ \cos(\alpha - 2\pi/3) & \cos(\alpha) & \cos(\alpha + 2\pi/3) \\ \cos(\alpha + 2\pi/3) & \cos(\alpha - 2\pi/3) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

se ne vuole ottenere la diagonalizzazione (quindi il disaccoppiamento tra i circuiti) e nel contempo la indipendenza da α . Ciò è ottenibile applicando trasformazioni differenti ai due lati della matrice (vale a dire, nel caso di induttanze, trasformazioni differenti per flussi e correnti).

Ricercate le due trasformazioni come casi particolari di una stessa trasformazione variante $\mathbf{T}(\theta)$, si consegue la struttura finale della trasformazione cercata, funzione unicamente di un parametro angolare θ . In tal forma lo scopo è raggiunto con la applicazione

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{T}(\theta_1)\mathbf{Z}(\alpha)\mathbf{T}(\theta_2)^{-1} \quad \text{con } \theta_1 - \theta_2 = \alpha$$

La ragione della condizione discussa risiede nel fatto che la $\mathbf{Z}(\alpha)$ appare come matrice delle induttanze mutue tra due sistemi trifasi accoppiati su strutture rotanti simmetriche soggette all'anomalia α (è il caso di statore e rotore delle macchine rotanti isotrope). La $\mathbf{Z}(\alpha)$ è comunque generalizzabile a mutui accoppiamenti di vario tipo tra sistemi trifasi, purché dotati di opportune simmetrie.

In tutti i casi si consegue l'invarianza dell'accoppiamento fra i sistemi trasformati.

Da notare infine che la condizione esposta comprende, come caso particolare, la condizione b), richiesta in precedenza solo per rendere più comprensibile e algoritmicamente meno astruso il percorso di determinazione della trasformazione definitiva. A commento e giustificazione delle proprietà richieste si deve considerare che forme più generali per le \mathbf{Z} e

$\mathbf{Z}(\alpha)$ e dotate di minor simmetria sono certo diagonalizzabili, ma, salvo casi eccezionali, con trasformazioni dipendenti dalle impedenze stesse. Si perderebbe così la generalità della trasformazione e verrebbero meno gran parte dei vantaggi analitici che ne conseguono.

La condizione d) poi, che impone la dipendenza della trasformazione dall'angolo θ , quindi dal tempo per angolo variabile, ha l'importante conseguenza di alterare l'andamento nel tempo delle variabili a cui è applicata. In particolare può modificare la frequenza, ad es. trasformare in costanti grandezze sinusoidali.

Tale risultato non è, ovviamente, casuale. Basti pensare che interazioni mutue tra strutture trifase in moto relativo si possono vedere come coppie di generatori pilotati a frequenze differenti. L'indipendenza dal tempo degli accoppiamenti si consegue solo se la trasformazione è in grado di unificare, quindi alterare, le frequenze di questi generatori con il "riportare" un sistema alla frequenza dell'altro.

Al di fuori delle strutture rotanti l'utilità della trasformazione variante risiede proprio nella prerogativa di alterare le frequenze, in senso lato, e quindi la struttura e le soluzioni dei modelli analitici.